

1. Demuestre las siguientes afirmaciones:

(a) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces, las matrices

$$A_S = \frac{A + A^t}{2}, \quad A_I = \frac{A - A^t}{2},$$

son tales que A_S es simétrica y A_I es antisimétrica.

(b) Toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se escribe como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica (indicación: utilice las matrices A_S y A_I definidas en el apartado anterior).

a) Comprobamos que $(A_S)^t = A_S$

$$A_S = \frac{1}{2} \cdot (A + A^t)^t = \frac{1}{2} \cdot (A^t + A) = \frac{1}{2} \cdot (A + A^t) = A_S$$

b) Comprobamos que $(A_I)^t = -A_I$

$$A_I^t = \frac{1}{2} \cdot (A - A^t)^t = \frac{1}{2} (A^t - A) = - \left[\frac{1}{2} \cdot (A - A^t) \right] = -A_I$$

2. Calcule la inversa de las siguientes matrices:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj } A)^t$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 1 + 2 - (2 - 2) = 3 \quad \text{Adj } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad |B| = -6 + 4 - (-2 - 6) = 6 \quad \text{Adj } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -6 & -4 & -10 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & -10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & -1/2 \\ 1/3 & -5/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

- (a) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, ¿puede ser incompatible? Si la respuesta es negativa, razónela; si es afirmativa, ponga un ejemplo.
- (b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, ¿puede ser compatible determinado? Si la respuesta es negativa, razónela; si es afirmativa, ponga un ejemplo.
- (c) Un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas, ¿puede ser compatible? Si la respuesta es negativa, razónela; si es afirmativa, ponga un ejemplo.

a) Incompatible si $Rg A \neq Rg A^*$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sucederá si $rg A = 1$ y $rg A^* = 2$, que pasará si una de las ecuaciones es dependiente

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

b) C.D si $Rg A = Rg A^* = n^{\circ}$ incógnitas

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango máximo de las matrices es 2, y hay 3 incógnitas, nunca será C.D.

c) C.D imposible (caso anterior) y C.I si $Rg A = Rg A^* \neq n^{\circ}$ incógnitas

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ej: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

4. Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

- (a) Discúptalo empleando el teorema de Rouché-Frobenius.
- (b) Si prescindes de una de las ecuaciones, ¿cómo es el sistema que resulta?
- (c) ¿Qué ecuación debe quitar para que el nuevo sistema tenga entre sus soluciones $(0, 0, 0)$?
- (d) Si se añade una ecuación más, ¿puede ocurrir que el sistema sea compatible determinado? ¿Y compatible indeterminado? ¿E incompatible?

$$a) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -12 \end{array} \right)$$

$$Rg A = Rg A^* = n^{\circ} \text{ incógnitas} \\ \text{C.D}$$

b) C.I, ya que los rangos serían iguales pero el n° de incógnitas no.

$$c) x + y - z = 4$$

d) Incompatible

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

C.D.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

C.I

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \\ 6 + 4 + 3 = 0 \end{cases}$$

6. En la cafetería del aulario de Rabanales, en un momento indeterminado de la historia en el que los precios eran otros, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja costaban 7.5 euros. Además, cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja costaban 7.20 euros.

(a) Calcule, de forma razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja.

(b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2 euros? Razone su respuesta.

$$3x + y + 2z = 7.5$$

$$4x + y + z = 7.2$$

$$2x + y + 3z = ?$$

$$II - I = x - z = -0.3$$

$$2 \cdot (II - I) = 2x - 2z = -0.6$$

$$II - (II - I) = 2x + y + 3z = 7.8$$

b) Si $z = 2$

$$\begin{cases} 3x + y = 3.5 \\ 4x + y = 5.2 \end{cases}$$

$$4x - 3x + 3.5 = 5.2$$

$$x = 1.7$$

$$y = -3 \cdot (1.7) + 3.5 = -1.6 \text{ precio negativo} = \text{imposible}$$

7. Discuta y resuelva cuando sea posible el siguiente sistema de ecuaciones lineales cuya expresión matricial es $AX = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ mx + 4y - 2z = 2m \\ (m+2)y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ m & 4 & -2 & 2m \\ 0 & m+2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - m \cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2m+4 & m-2 & 0 \\ 0 & m+2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - \frac{1}{2} F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2m+4 & m-2 & 0 \\ 0 & 0 & m/2-2 & 1 \end{array} \right)$$

Incompatible si $m/2 - 2 = 0$; $m = 4$

C.I. si $2m+4=0$ y $-m-2=0$ $m = -2$

C.D. para toda $m \neq 4$ y $m \neq -2$

9. Clasifique y resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ 2x - y - z - t = -1 \\ x - 2y - 2z = -3 \\ 3x - 3y - 3z - t = -4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & -3 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 - 3F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -6 & -6 & 2 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_4 \rightarrow F_4 - 2F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{rg } A = 2$ $\text{rg } A^* = 2$ $\text{N}^\circ \text{ incógnitas} = 4$ por tanto; C.I

$$\left. \begin{aligned} x + y + z - t &= 2 \\ -3y - 3z + t &= -5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t &= \lambda \\ z &= \mu \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} x + y &= 2 + \lambda - \mu \\ -3y &= -5 - \lambda + 3\mu \end{aligned} ; \quad \boxed{y = \frac{5 + \lambda - 3\mu}{3}}$$

$$x = 2 + \lambda - \mu + \frac{-5 - \lambda + 3\mu}{3} = \boxed{\frac{1 + 2\lambda}{3}}$$